

Дәріс №2. Күрделі функцияның туындысы. Көп айнымалының бағыт бойынша туындысы және градиенті.

Анықтама. $z = f(u, v)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ функцияларынан құрылған күрделі функция деп екі (x, y) айнымалыларынан тұратын $z = f(u(x, y), v(x, y))$ функцияны айтамыз.

Теорема 1. $u = u(x, y)$ және $v = v(x, y)$ функцияларының (x_0, y_0) нүктесінде x және y бойынша дербес туындылары болсын, ал $z = f(u, v)$ функциясы және оның u мен v бойынша дербес туындылары (u_0, v_0) нүктесінің маңайында үзіліссіз болсын, ал $u_0 = u(x_0, y_0)$, $v_0 = v(x_0, y_0)$.

Онда күрделі $z = f(u(x, y), v(x, y))$ функцияның (x_0, y_0) нүктесінде дербес туындылары бар және мына формулалармен табылады:

$$\begin{aligned} z'_x &= f'_u u'_x + f'_v v'_x, \\ z'_y &= f'_u u'_y + f'_v v'_y \end{aligned} \quad (1)$$

Мысал. $z = u/v$, $u = e^{x+y}$, $v = \ln(xy)$ осы функциялардан құрылған күрделі функцияның туындысын табалық:

$$\begin{aligned} z'_x &= \frac{1}{v} e^{x+y} - \frac{u}{v^2} \frac{y}{xy} = \frac{e^{x+y}}{\ln xy} - \frac{e^{x+y}}{x(\ln(xy))^2}, \\ z'_y &= \frac{1}{v} e^{x+y} - \frac{u}{v^2} \frac{x}{xy} = \frac{e^{x+y}}{\ln xy} - \frac{e^{x+y}}{y(\ln(xy))^2}. \end{aligned}$$

Анықтама. $y = y(x)$ бір айнымалы функциясын мына түрдегі $F(x, y) = 0$ теңдеу арқылы жазуға болады. Осындай теңдеумен берілген $y = y(x)$ функциясын айқын емес функция деп атайды.

Теорема 2. Айталық (x_0, y_0) нүктесінің маңайында $z = F(x, y)$ функциясы және F'_x, F'_y дербес туындылары үзіліссіз болсын, мұнда $F(x_0, y_0) = 0$ және $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Сонда $F(x, y) = 0$ теңдеуі x_0 нүктесінің маңайында дифференциалданатын $y = y(x)$ функциясын анықтайды және оның туындысы:

$$y' = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \quad (2)$$

Мысал. $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ теңдеуімен берілген функцияның y' туындысын табалық.

$$y'_x = -\frac{(x^2 + y^2 - R^2)'_x}{(x^2 + y^2 - R^2)'_y} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}.$$

Анықтама. $F(x, y, z) = 0$ теңдеуімен берілген $z = z(x, y)$ функциясын екі айнымалының айқын емес функциясы деп атайды.

Теорема. Айталық (x_0, y_0, z_0) нүктесінің маңайында $u = F(x, y, z)$ функциясы және оның F'_x, F'_y, F'_z дербес туындылары үзіліссіз болсын, мұнда $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ және $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, сонда $F(x, y, z) = 0$ теңдеуі (x_0, y_0) нүктесінің маңайында дифференциалданатын $z = z(x, y)$ функциясын анықтайды және оның дербес туындылары

$$z'_x = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \quad z'_y = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} \quad (3)$$

Мысал. $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ теңдеуі $z = \pm \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ функциясын анықтайды.

Оның графиктері жарты сфералар. x және y бойынша дербес туындылары төмендегідей болады:

$$z'_x = -\frac{(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)'_x}{(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)'_z} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z},$$

$$z'_y = -\frac{(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)'_y}{(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)'_z} = -\frac{2y}{2z} = -\frac{y}{z}$$

Көп айнымалының бағыт бойынша туындысы және градиенті

$u = u(x, y, z)$ үш айнымалы функциясы берілсін. Осы функцияның $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесінен $\vec{a}_0$ бірлік векторының бағытымен қозғалысының жылдамдығын қарастырайық. $\vec{a}_0$ векторын бағыттаушы косинустар арқылы анықтайық: $\vec{a}_0 = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$.

Анықтама. $u = u(x, y, z)$ функциясының M_0 нүктесіндегі $\vec{a}_0$ векторы бағыты бойынша туындысы мына формуламен есептелінеді:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{a}_0} \right|_{M_0} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) \Big|_{M_0} \quad (1)$$

Мысал. $z = x^2 y + y^2$ функциясының $M(1, 2)$ нүктесіндегі $\overline{MM_1}$ вектор бағыты бойынша туындысын табу керек, мұндағы $M_1(3, 0)$.

$\overline{MM_1}$ векторының бағыттаушы косинустарын табамыз: $\overline{MM_1} = \{3-1, 0-2\} = \{2, -2\} = 2\vec{i} - 2\vec{j}$;

$$|\overline{MM_1}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \cos \beta = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial \vec{l}} \right|_M = \left(2xy \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + (x^2 + 2y) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right) \Big|_M = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + (1^2 + 2 \cdot 2) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2} - \frac{5}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Анықтама. $u = f(x, y, z)$ функциясының градиенті деп дербес туындылар координаталары болатын векторды айтады және былай белгіленеді:

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} \quad (2)$$

$\frac{\partial u}{\partial \vec{a}_0}$ - ді u градиент арқылы өрнектейтін басқа формуланы аламыз:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{a}_0} = \text{grad } u \cdot \vec{a}_0 \quad (3)$$

Мысал. $u(x, y, z) = xy^2 - 3xz^2 + yz^2$ функциясымен берілген дененің $M_0(1; -2; -1)$ нүктесіндегі $\vec{a} = 12\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ вектор бағытындағы температура өзгеру жылдамдығын есептеу керек. Ол үшін дербес туындылар мен u өрісінің градиентін табамыз:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 - 6xz; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2xy + z^2; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -3x^2 + 2yz;$$

$$\text{grad } u = (y^2 - 6xz)\vec{i} + (2xy + z^2)\vec{j} + (-3x^2 + 2yz)\vec{k};$$

$$\text{grad } u(M_0) = 10\vec{i} + 5\vec{j} - 7\vec{k}.$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{12^2 + (-3)^2 + 4^2} = 13$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{a}}(M_0) = 10 \cdot \frac{12}{13} + 5 \cdot \frac{(-3)}{13} + (-7) \cdot \frac{4}{13} = \frac{77}{13}$$

Градиенттің қасиеттері

1. u өрісінің градиенті мен $\vec{a}_0$ векторы арасындағы бұрышыты φ деп белгілейік, онда (3) тегі скаляр көбейтіндіні мына $|\text{grad } u| \cdot |\vec{a}_0| \cdot \cos \varphi = |\text{grad } u| \cdot \cos \varphi$ түрінде жазуға болады, бұл $\text{grad } u$ -дың $\vec{a}_0$ векторына проекциясы болады. Демек,

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{a}_0} = \text{pr}_{\vec{a}_0} \text{grad } u \quad (4)$$

2. $\max \frac{\partial u}{\partial \vec{a}_0} = |\text{grad } u|$ - u функциясының градиенті $\vec{a}_0$ бағыты бойынша $\frac{\partial u}{\partial \vec{a}_0}$ -ның максимумы болады.

яғни градиент функцияның ең үлкен өсу бағытын береді, оның модулі осы бағыттағы туындыға тең.